Aleksi Setälä

LINEAARISET TRANSFORMAATIOT

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Marraskuu 2020

Tiivistelmä

Aleksi Setälä: Lineaariset transformaatiot
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Marraskuu 2020

Tässä tutkielmassa esitellään lineaarisia transformaatioita, niiden matemaattisia ominaisuuksia ja geometrisiä tulkintoja. Tutkielman lopussa esitellään vielä joitakin lineaaristen transformaatioiden käytännön sovelluksia.

Tutkielman alussa määritellään lineaarisen transformaation käsite ja annetaan esimerkki funktiosta, joka on lineaarinen transformaatio. Selvyyden vuoksi tutkielmassa annetaan myös esimerkki funktiosta, joka ei ole lineaarinen transformaatio. Tutkielmassa esitellään todistus lauseelle, jonka mukaan äärellisulotteisissa avaruuksissa minkä tahansa lineaarisen transformaation voi esittää matriisin ja vektorin kertolaskuna. Lauseen yhteydessä annetaan esimerkkejä tunnetuista transformaatioista sekä matriiseista, joilla ne voidaan esittää. Skaalaus- ja rotaatiotransformaatioille esitellään myös geometrinen näkökulma ja rotaation tapauksessa perustellaan, miksi esitetty tulkinta on oikea. Sekä skaalaus- että rotaatiotransformaatiota havainnollistetaan kuvilla.

Tutkielman seuraavassa luvussa esitellään useamman lineaarisen transformaation yhdistäminen. Tutkielmassa esitellään ja todistetaan lause, jonka mukaan kahden lineaarisen transformaation yhdistelmä on niin ikään lineaarinen transformaatio. Lisäksi esitellään ja todistetaan lause, jonka mukaan usean transformaation yhdistelmää kuvaava matriisi voidaan määrittää kertomalla yhdistettävien transformaatioiden matriisit keskenään oikeassa järjestyksessä. Transformaatioiden yhdistämisestä annetaan esimerkkinä kahden rotaation yhdistäminen sekä $\mathbb{R}^2$:ssa että $\mathbb{R}^3$:ssa. Lisäksi jälkimmäisessä esimerkissä havainnollistetaan, miksi transformaatioita yhdistäessä suoritusjärjestyksellä on merkitystä. Rotaatioita $\mathbb{R}^3$:ssa havainnollistetaan kuvilla.

Tutkielman päätteeksi esitellään lineaaristen transformaatioiden käytännön sovelluksia kuvankäsittelyssä sekä kolmiulotteisen grafiikan esittämisessä. Viimeisessä luvussa mainitaan myös käytännön sovelluksissa yleisesti käytetyt homogeeniset

koordinaatit sekä lineaarisia transformaatioita hiukan laajempi affiinitransformaation käsite, mutta affiinitransformaatioihin tai homogeenisiin koordinaatteihin ei perehdytä tarkemmin.

Avainsanat: lineaarinen transformaatio, matriisi, lineaarialgebra

Sisällys

1 Johdanto **5**

2 Lineaarisen transformaation määritelmä **6**

3 Lineaaristen transformaatioiden esittäminen matriiseilla **8**

4 Transformaatioiden yhdistäminen **12**

5 Huomioita käytännön sovelluksista **17**

Lähteet **18**

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan lineaarisia transformaatioita ja niiden ominaisuuksia. Lineaarisista transformaatioista annetaan esimerkkejä, ja ei-triviaaleja esimerkkejä havainnollistetaan kuvien avulla. Lukijalta edellytetään lineaarialgebran perusteiden tuntemista. Lukijan tulee tuntea esimerkiksi vektorien laskutoimitukset euklidisessa avaruudessa sekä matriisien kertolasku.

Tutkielman alussa esitellään lineaarisen transformaation määritelmä ja annetaan esimerkit funktioista, joista toinen täyttää määritelmän ja toinen ei. Tämän jälkeen todistetaan, että äärellisulotteisissa vektoriavaruuksissa lineaarisen transformaation voi esittää matriisikertolaskulla. Transformaation esittämisestä matriisilla annetaan esimerkkejä ja havainnollistavia kuvia. Tutkielmassa esitellään myös, miten monta lineaarista transformaatiota voidaan yhdistää yhdeksi matriisikertolaskuksi.

Tutkielman päätteeksi mainitaan lyhyesti lineaaristen transformaatioiden soveltamisesta tietokonegrafiikan esittämisessä. Tässä yhteydessä mainitaan lyhyesti myös käytännön sovelluksissa usein käytetyistä affiinitransformaatioista ja homogeenisistä koordinaateista, mutta näihin aiheisiin ei perehdytä kovin tarkasti.

2 Lineaarisen transformaation määritelmä

Määritelmä 2.1. Olkoot V ja W vektoriavaruuksia. Funktiota $T\colon V \to W$ kutsutaan *lineaariseksi transformaatioksi*, jos:

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ ja

2. $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$

kaikilla vektoreilla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ja kaikilla skalaareilla k. [2, s. 245]

Esimerkki 2.1 (vrt. [2, s. 246])**.** Olkoon $\mathbf{v} = (x, y)$ vektori euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Määritellään funktio $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ seuraavasti:

$$T(\mathbf{v}) = (x, x-y, 2y).$$

Osoitetaan, että T on lineaarinen transformaatio. Olkoon $\mathbf{u}' = (x_1, y_1)$ ja $\mathbf{v}' = (x_2, y_2)$. Nyt

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}'+\mathbf{v}') &= T(x_1+x_2, y_1+y_2)\\
&= (x_1+x_2, (x_1+x_2)-(y_1+y_2), 2(y_1+y_2))\\
&= (x_1+x_2, (x_1-y_1)+(x_2-y_2), 2y_1+2y_2)\\
&= (x_1, (x_1-y_1), 2y_1) + (x_2, (x_2-y_2), 2y_2)\\
&= T(\mathbf{u}') + T(\mathbf{v}').
\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
T(k\mathbf{u}') &= T(kx_1, ky_1)\\
&= (kx_1, k(x_1-y_1), k2y_1)\\
&= k(x_1, x_1-y_1, 2y_1)\\
&= kT(\mathbf{u}').
\end{aligned}$$

Määritelmän 2.1 molemmat kohdat täyttyvät, joten T on lineaarinen transformaatio.

$\square$

Esimerkki 2.2. Olkoon $\mathbf{v}$ kuten edellä. Määritellään funktio $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seuraavasti:

$$T(\mathbf{v}) = (x, xy).$$

Osoitetaan, että T ei ole lineaarinen transformaatio. Olkoot $\mathbf{u}'$ ja $\mathbf{v}'$ kuten edellä. Nyt

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}' + \mathbf{v}') &= (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)) \\
&= (x_1 + x_2, x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2) \\
&\neq (x_1 + x_2, x_1 y_1 + x_2 y_2) \\
&= T(\mathbf{u}') + T(\mathbf{v}').
\end{aligned}$$

Määritelmän 2.1 ensimmäinen kohta ei täyty, joten T ei ole lineaarinen transformaatio. $\square$

3 Lineaaristen transformaatioiden esittäminen matriiseilla

Osoitetaan seuraavaksi, että äärellisulotteisissa avaruuksissa lineaarisen transformaation voi esittää matriisin ja vektorin kertolaskulla.

Lause 3.1. *Olkoon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaarinen transformaatio. Olkoot lisäksi $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta ja $\mathbf{A}$ matriisi, jonka sarakkeet ovat $T(\mathbf{e_1})$, $T(\mathbf{e_2})$, ..., $T(\mathbf{e_n})$. Tällöin*

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

millä tahansa vektorilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Todistus (vrt. [1, s. 213]). Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektori $\mathbb{R}^n$:ssä. Silloin

$$\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}.$$

Koska T on lineaarinen transformaatio,

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}) \\
&= T(x_1\mathbf{e_1}) + T(x_2\mathbf{e_2}) + \cdots + T(x_n\mathbf{e_n}) \\
&= x_1T(\mathbf{e_1}) + x_2T(\mathbf{e_2}) + \cdots + x_nT(\mathbf{e_n}) \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

□

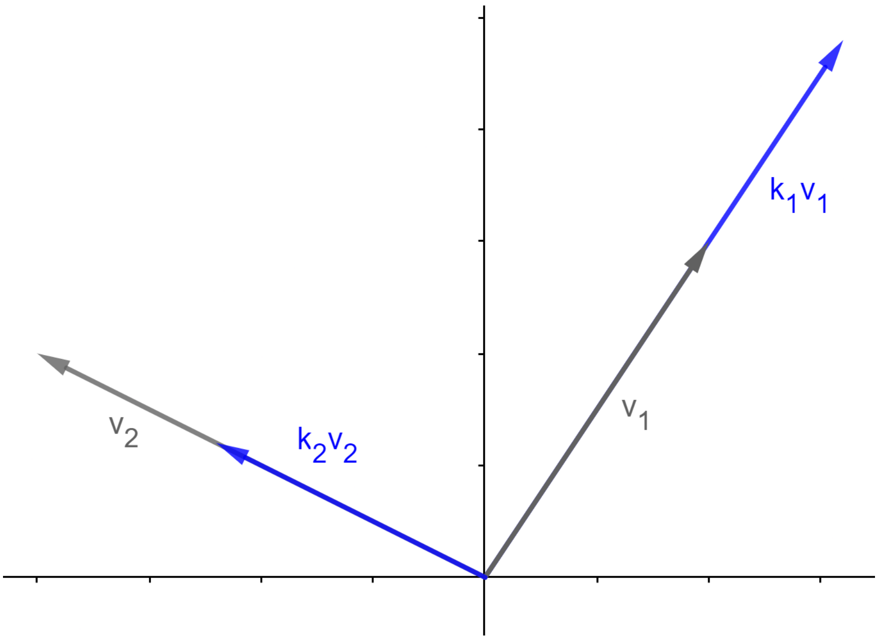
Esimerkki 3.1 (Identiteettitransformaatio)**.** Vrt. [1, s. 216] Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ määritelty siten, että $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Transformaatio T voidaan esittää kertolaskulla $\mathbf{A}\mathbf{x}$, missä $\mathbf{A}$ on $n \times n$ identiteettimatriisi.

Esimerkki 3.2 (Nollatransformaatio)**.** Vrt. [1, s. 216] Olkoon $\mathbf{x}$ kuten edellä ja olkoon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ määritelty siten, että $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Transformaatio T voidaan esittää kertolaskulla $\mathbf{Ax}$, missä $\mathbf{A}$ on $m \times n$ nollamatriisi.

Esimerkki 3.3 (Skaalaus)**.** Vrt. [2, s. 248]. Olkoon k jokin reaaliluku ja olkoon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ määritelty siten, että $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$. Transformaatio T voidaan esittää kertolaskulla $\mathbf{Ax}$, missä $\mathbf{A}$ on diagonaalimatriisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}.$$

Jos $k > 1$, transformaatiota T kutsutaan *dilaatioksi*, ja jos $0 > k > 1$, sitä kutsutaan *kontraktioksi*. Dilaation voidaan ajatella ”venyttävän” ja kontraktion ”lyhentävän” vektoria $\mathbf{x}$. Kuvassa 3.1 on vektorin $\mathbf{v_1}$ dilaatio, jossa $k_1 = 1{,}6$ ja vektorin $\mathbf{v_2}$ kontraktio, jossa $k_2 = 0{,}6$.



Kuva 3.1. Dilaatio ja kontraktio

Esimerkki 3.4 (Rotaatio $\mathbb{R}^2$:ssa)**.** Vrt. [2, s. 246–247]. Olkoon θ jokin kulma ja $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ vektori $\mathbb{R}^2$:ssa. Olkoon lisäksi $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformaatio, joka voidaan määritellä kertolaskulla $\mathbf{Av}$, jossa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Geometrisesta näkökulmasta transformaatio T kuvaa vektorin $\mathbf{v}$ kääntämistä origon ympäri kulman θ verran. Seuraavaksi esitellään tälle perustelu.

Olkoon $\mathbf{v}' = \left[\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right]$ se vektori, joka saadaan, kun käännetään vektoria $\mathbf{v}$ vastapäivään kulman θ verran. Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathbf{v}' = T(\mathbf{v})$. Olkoon $r = \|\mathbf{v}\|$ ja ϕ kulma vektorin $\mathbf{v}$ ja x-akselin välillä (kuva 3.2). Tällöin

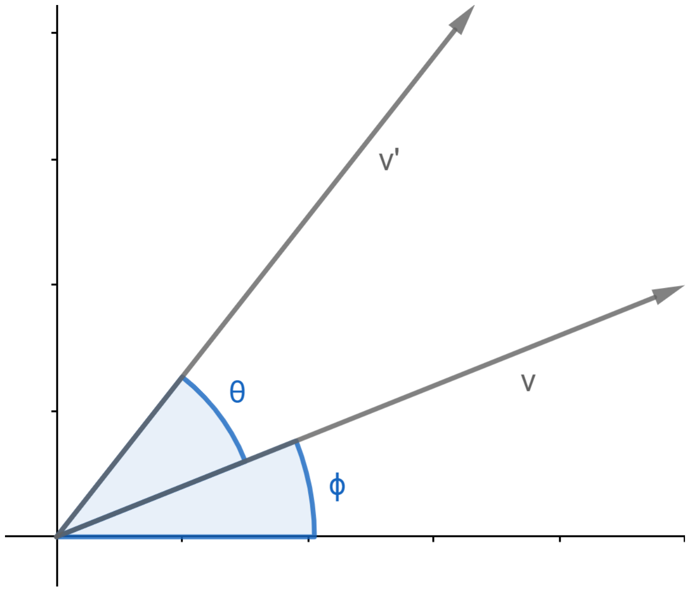
$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi.$$

Vastaavasti, koska $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\|$,

$$x' = r\cos(\theta + \phi), \qquad y' = r\sin(\theta + \phi).$$

Siis

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r\cos(\theta + \phi) \\ r\sin(\theta + \phi) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{v} = T(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$



Kuva 3.2. Rotaatio

4 Transformaatioiden yhdistäminen

Lause 4.1. *Olkoot U, V ja W vektoriavaruuksia ja $T\colon U \to V$ ja $S\colon V \to W$ lineaarisia transformaatioita. Olkoon lisäksi* $\mathbf{u}$ *vektori U:ssa. Tällöin $S(T(\mathbf{u}))$ on myös lineaarinen transformaatio.*

Todistus (vrt. [1, s. 217]). Määritelmän 2.1 mukaan täytyy todistaa, että:

1. $S(T(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2})) = S(T(\mathbf{u_1})) + S(T(\mathbf{u_2}))$ ja
2. $S(T(k\mathbf{u})) = kS(T(\mathbf{u}))$.

Koska T ja S ovat lineaarisia transformaatioita,

$$S(T(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2})) = S(T(\mathbf{u_1}) + T(\mathbf{u_2})) = S(T(\mathbf{u_1})) + S(T(\mathbf{u_2})).$$

Samoista syistä

$$S(T(k\mathbf{u})) = S(kT(\mathbf{u})) = kS(T(\mathbf{u})).$$

Määritelmän 2.1 molemmat kohdat täyttyvät, joten $S(T(\mathbf{u}))$ on lineaarinen transformaatio. □

Kuten yksittäisetkin transformaatiot, usean lineaarisen transformaation yhdistelmä voidaan esittää matriisikertolaskulla. Tämä voi olla hyödyllistä käytännön sovelluksissa.

Lause 4.2. *Olkoot $V_1, V_2, \ldots, V_{k+1}$ vektoriavaruuksia ja $T_1\colon V_1 \to V_2$, $T_2\colon V_2 \to V_3$, $\ldots$, $T_k\colon V_k \to V_{k+1}$ lineaarisia transformaatioita, jotka on määritelty siten, että $T_1(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}$, $T_2(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}$, $\ldots$, $T_k(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_k\mathbf{x}$. Transformaatio $T_k(\ldots T_2(T_1(\mathbf{x})))$ voidaan esittää kertolaskulla $\mathbf{A}\mathbf{x}$, jossa $\mathbf{A} = \mathbf{A}_k \ldots \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$.*

Todistus (vrt. [3, s. 391–392]). Oletusten ja matriisien kertolaskun assosiatiivisuuden perusteella

$$\begin{aligned} T_k(\ldots T_2(T_1(\mathbf{x}))) &= T_k(\ldots T_2(\mathbf{A}_1\mathbf{x})) \\ &= T_k(\ldots \mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{A}_k(\ldots \mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{x})) \\ &= (((\mathbf{A}_k \ldots)\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_1)\mathbf{x} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 4.1 (Kaksi rotaatiota)**.** Olkoon $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$ ja olkoot transformaatiot $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotaatio kulmalla θ ja $S \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotaatio kulmalla ϕ. Esimerkin 3.4 mukaan T ja S voidaan esittää matriiseilla

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Transformaatio $S(T(\mathbf{v}))$ voidaan esittää kertolaskulla $\mathbf{A}_S\mathbf{A}_T\mathbf{v}$. Lasketaan transformaatioiden yhdistelmälle oma matriisinsa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_S\mathbf{A}_T &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Transformaatio $S(T(\mathbf{v}))$ voidaan siis esittää kertolaskulla

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Huomautus: esimerkin 4.1 kertolasku $\mathbf{A}_S\mathbf{A}_T\mathbf{v}$ tarkoittaa siis, että suoritetaan ensin transformaatio T ja sen jälkeen transformaatio S. Tässä tapauksessa lopputulos on sama riippumatta suoritusjärjestyksestä, mutta useimmiten tämä ei ole totta.

Esimerkki 4.2 (Rotaatiot $\mathbb{R}^3$:ssa)**.** Rotaatiot $\mathbb{R}^3$:ssa voidaan ilmaista samankaltaisilla matriiseilla, kuin $\mathbb{R}^2$:ssakin. Kahdessa ulottuvuudessa rotaatio on mielekästä ilmaista vain yhdellä tavalla, mutta kolmessa ulottuvuudessa rotaatio voidaan suorittaa joko x-, y-, tai z-akselin ympäri. Kaikille kolmelle eri rotaatiolle voidaan johtaa matriisi samaan tapaan kuin esimerkissä 3.4. Rotaatiomatriisit x-, y-, ja z-akselin ympäri ovat

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[3, s. 411]. Nämä matriisit määrittelevät rotaatiot ns. oikeakätisessä koordinaatistossa siten, että kun rotaatiota katsotaan akselin positiiviselta puolelta, rotaatio tapahtuu vastapäivään [3, s. 411–412].

Edellä mainittiin, että useimmiten transformaatioiden suoritusjärjestyksellä on merkitystä. Tutkitaan nyt tapausta, jossa suoritetaan rotaatio x-akselin ympäri kulman

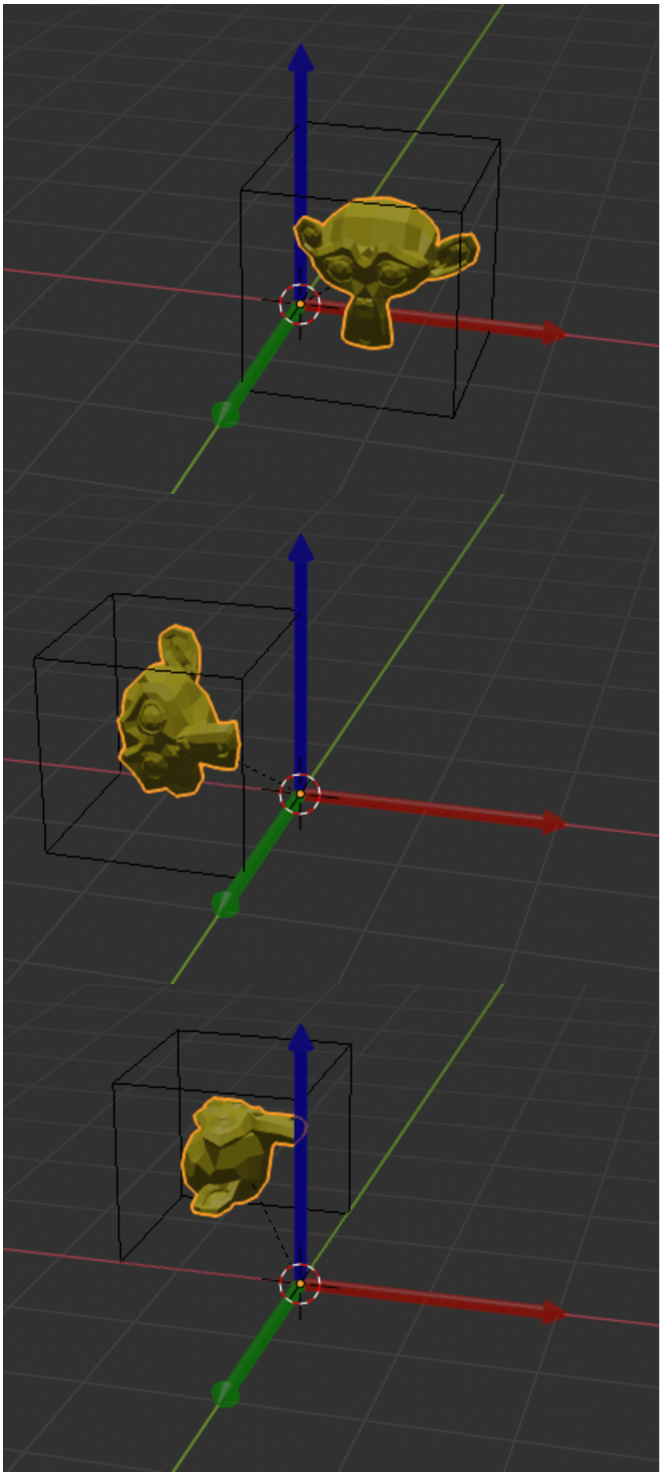
ϕ verran ja y-akselin ympäri kulman θ verran. Määritetään matriisi transformaatiolle, jossa rotaatio suoritetaan ensin x-akselin ja sitten y-akselin ympäri:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{yx} = \mathbf{A}_y \mathbf{A}_x &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

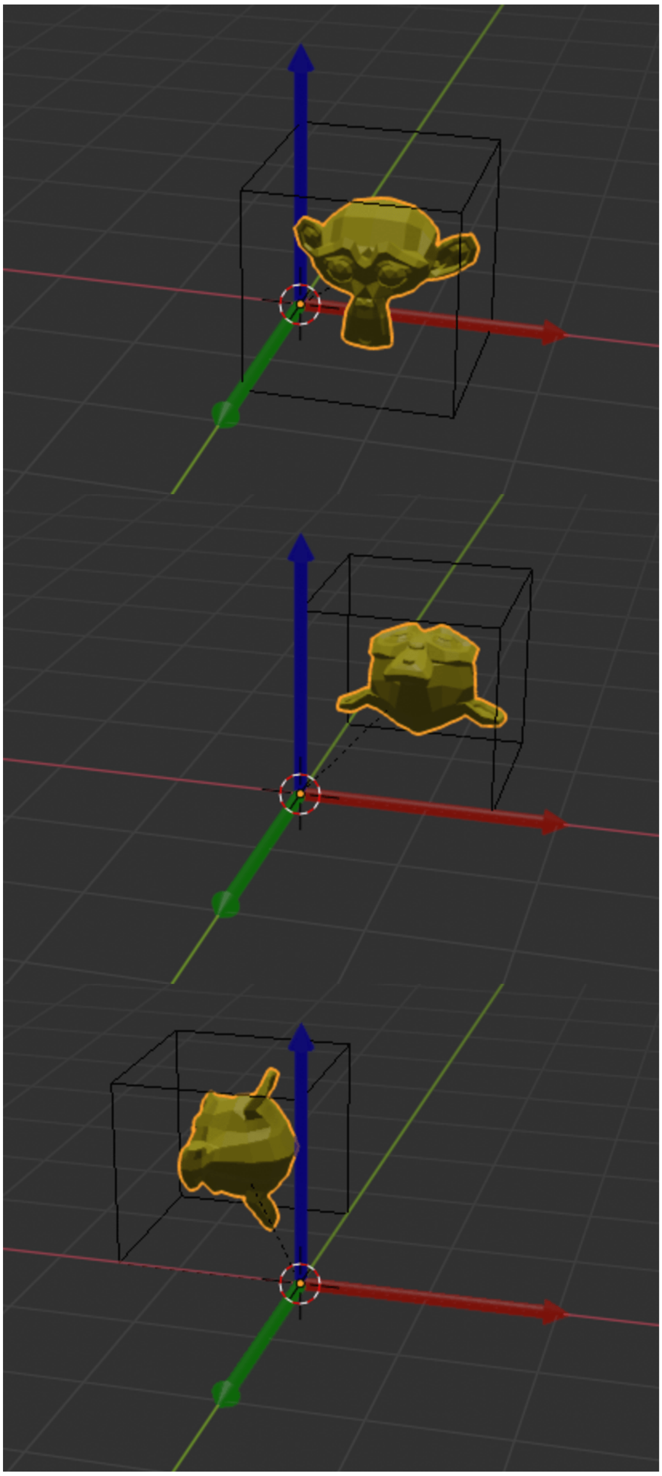
Määritetään vastaavasti matriisi transformaatiolle, jossa rotaatiot suoritetaan toisessa järjestyksessä ja osoitetaan, että näin saadaan eri matriisi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{xy} = \mathbf{A}_x \mathbf{A}_y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \cos\phi & -\sin\phi\cos\theta \\ -\cos\phi\sin\theta & \sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \\
&\neq \mathbf{A}_{yx}.
\end{aligned}$$

Kuvat 4.1 ja 4.2 havainnollistavat edellä esitettyjä transformaatioita. Kuvassa 4.1 kappaletta kierretään ensin x-akselin ympäri ja sitten y-akselin ympäri. Kuvassa 4.2 kierrot tehdään eri järjestyksessä. Molemmissa tapauksissa kulmat $\phi = \frac{\pi}{2}$ ja $\theta = -\frac{\pi}{2}$.



Kuva 4.1. Rotaatio x- ja y-akselin ympäri



Kuva 4.2. Rotaatio y- ja x-akselin ympäri

5 Huomioita käytännön sovelluksista

Eräs lineaaristen transformaatioiden sovellusaloista on tietokonegrafiikan käsittely. Kuvat koostuvat pikseleistä ja kolmiulotteiset mallit kärjistä (engl. vertex), jotka määrittelevät mallin muodon. Jokaisen kuvassa olevan pikselin tai mallissa olevan kärjen voi ajatella vektorina $\mathbb{R}^2$:ssa tai $\mathbb{R}^3$:ssa, ja suorittaa saman transformaation jokaiselle vektorille. Lopputuloksena saatava vektorijoukko määrittelee uuden kuvan tai mallin.

Lineaaristen transformaatioiden yksi rajoite on se, että jokainen lineaarinen transformaatio kuvaa lähtöjoukon nollavektorin kuvajoukon nollavektoriksi. (Tod. [1, s. 211].) Tästä johtuen lineaarisen transformaation avulla ei voida kuvata kuvan tai mallin siirtoa. Käytännön sovelluksissa tarvitaankin tyypillisesti *affiinitransformaatioita*, jotka ovat lineaaristen transformaatioiden ja siirtojen yhdistelmiä [4]. Tämä aiheuttaa ongelman, sillä affiinitransformaatiota ei voida esittää matriisikertolaskulla samoin kuin lineaarinen transformaatio. Ongelma voidaan ratkaista esittämällä käytetyt vektorit *homogeenisillä koordinaateilla* siten, että vektori $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esitetään vektorina $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$ ja vastaavasti vektori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vektorina $(x, y, z, 1) \in \mathbb{R}^4$. Koordinaatiston laajentaminen mahdollistaa affiinitransformaatioiden esittämisen lineaarisena transformaationa korkeammassa ulottuvuudessa [5].

Lähteet

[1] Anthony, M. & Harvey, M. *Linear algebra – Concepts and methods*. Cambridge University Press, 2012.

[2] Anton, H. *Elementary linear algebra, 5th edition*. John Wiley & Sons, 1987.

[3] Larson, R. & Falvo, D.C. *Elementary Linear Algebra, 6th edition*. Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.

[4] Wikipedia contributors. *Affine transformation (Structure)*. https://en.wikipedia.org/wiki/Affine_transformation#Structure, viitattu 18.11.2020

[5] Wikipedia contributors. *Transformation matrix (Affine transformations)*. https://en.wikipedia.org/wiki/Transformation_matrix#Affine_transformations, viitattu 18.11.2020